

Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

1 Généralités (Gourdon)

- Suite de Cauchy + Remarques de base
- Définition espace complet + Exemples
- Existence d'un complété
- Lien entre complet et fermé
- Stabilité par produit

2 Exemples classiques et usuels d'espaces complets

2.1 Espaces de Banach généraux

- Définition
- Cas de la dimension finie
- Implication sur l'ensemble des applications linéaires
- Équivalence de la complétude avec la convergence des séries absolument convergentes

2.2 Hilbert

- Définition + Exemples
- Dév 1 : Projection sur un convexe fermé
- Corollaires sur les sous-espaces orthogonaux
- Théorème de représentation de Riesz + adjoint
- Base hilbertienne

2.3 Espaces L^p (Hirsch-Lacombe)

- Définition
- Inégalité de Hölder
- Théorème de Riesz-Fischer + corollaire sur les suites extraites

2.4 Un exemple particulier

- Définition de l'espace de Bergman
- Dév 2 : Espace de Bergman

3 Utilisation de la notion

3.1 Théorème de point fixe

- Énoncé du théorème de Picard
- Faux si seulement $(d(f(x), f(y)) < d(x, y))$
- Corollaire si f^k est contractante
- Application : TVI et/ou Cauchy-Lipschitz

3.2 Prolongement des applications (Willem)

- Théorème de prolongement d'uniforme continuité
- Densité de Schwarz dans L^2
- Définition de la transformée de Fourier dans L^2